INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES
STATISTICIENS ECONOMISTES
A L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

SESSION 1988 - Option MATHEMATIQUES

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

**Notations**

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. Les éléments de E sont notés x,y,z... et les sous-espaces vectoriels de E sont désignés par F, G, H. Si F et G sont deux sous-espaces de E, leur somme est notée F+G. On suppose dans tout le problème l'espace E muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ de sorte que le couple $(E,\langle .,. \rangle)$ constitue un espace euclidien.

A tout sous-espace F, on peut associer le sous-espace orthogonal de F, noté $\overset{o}{F}$. On rappelle que F et $\overset{o}{F}$ sont deux sous-espaces supplémentaires de E : $E = F \oplus \overset{o}{F}$.

I

Etant donné un sous-espace F, tout vecteur x de E peut donc se décomposer de manière unique comme somme : $x = y + y_o$, avec $y \in F$ et $y_o \in \overset{o}{F}$.

On appelle projecteur orthogonal sur F l'application de E dans E qui a l'élément x associe le premier élément y de la décomposition précédente. Ce projecteur est noté $P_F$.

I. 1° Montrer que $P_F$ est un endomorphisme de E. Vérifier qu'il est idempotent : $P_F^2 = P_F$ et qu'il est autoadjoint :

$$\forall x,y \in E \qquad \langle x, P_F y \rangle = \langle P_F x, y \rangle.$$

Quel est son noyau ? Quelle est son image ?

I. 2° Inversement établir que tout endomorphisme P idempotent et autoadjoint est un projecteur orthogonal. Sur quel sous-espace ?

I. 3° On considère deux sous-espaces $F \subset G$. Vérifier que : $P_F \, P_G = P_G \, P_F = P_F$.

I. 4° Etant donnés deux sous-espaces quelconques F et G, établir que : $P_{F+G} = P_F + P_H$, où le sous-espace H est défini par $H = P_F^o \, G$.

II

Deux sous-espaces F et G sont dits orthogonaux conditionnellement à un troisième H et on note : $(F \perp G)/H$, si et seulement si les sous-espaces $P_H^o \, F$ et $P_H^o \, G$ sont orthogonaux.

II. 1° On suppose H fixé. On définit la relation binaire $\mathcal{R}_H$ sur les sous-espaces de E par : $F \mathcal{R}_H G \Leftrightarrow (F \perp G)/H$. Cette relation est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ?

II. 2° Interpréter cette relation lorsque H = E et lorsque H = (0).

II. 3° Vérifier que si $F \subset H$, on a pour tout sous-espace G : $(F \perp G)/H$.

II. 4° Etablir l'équivalence : $(F \perp G)/H \Leftrightarrow [(F+F_1) \perp (G+G_1)]/H$,

où $F_1$ et $G_1$ sont deux sous-espaces quelconques tels que :

$$P_H^o \, F_1 \subset P_H^o \, F \quad \text{et} \quad P_H^o \, G_1 \subset P_H^o \, G.$$

II. 5° Montrer que F et G sont orthogonaux conditionnellement à H si et seulement si : $G \subset \mathrm{Ker}\,(P_{F+H} - P_H)$.

II. 6° Soient F, G, H, trois sous-espaces de E et $H_1$ un sous-espace orthogonal à F, G et H. Etablir l'équivalence :

$$(F \perp G)/H \Leftrightarrow (F \perp G)/H \oplus H_1.$$

III

On note : $X = (x_1,\ldots,x_K)$, $Y = (y_1,\ldots,y_L)$, $Z = (z_1,\ldots,z_M)$ ; des familles de vecteurs de E. Si X et Y sont deux telles familles, [X,Y] est la matrice de taille (K,L) de terme général : $\langle x_k, y_\ell \rangle$, $k=1,\ldots,K$, $\ell=1,\ldots,L$.

III. 1° Vérifier que la matrice [Z,Z] est inversible si et seulement si les vecteurs de la famille Z sont linéairement indépendants.

Dans la suite on considère deux familles Y,Z telles que les vecteurs $y_1,\ldots,y_L,z_1,\ldots,z_M$ soient linéairement indépendants et on note (Y,Z) la famille constituée de ces L+M vecteurs.

Tournez la page S.V.P.

III. 2° Montrer que la matrice carrée inversible $[(Y,Z),(Y,Z)]$ de taille (L+M, L+M), admet l'écriture par blocs :

$$\begin{pmatrix} [Y,Y] & [Y,Z] \\ [Z,Y] & [Z,Z] \end{pmatrix}.$$

Etablir que son inverse admet l'écriture par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & -A[Y,Z][Z,Z]^{-1} \\ -[Z,Z]^{-1}[Z,Y]A & [Z,Z]^{-1}+[Z,Z]^{-1}[Z,Y]\,A\,[Y,Z][Z,Z]^{-1} \end{pmatrix},$$

avec : $A = \left([Y,Y] - [Y,Z][Z,Z]^{-1}[Z,Y]\right)^{-1}$.

III. 3° On pose : $V(X/Z) = [X,X] - [X,Z][Z,Z]^{-1}[Z,X]$

et $V[X/(Y,Z)] = [X,X] - ([X,Y],[X,Z])[(Y,Z),(Y,Z)]^{-1}\begin{pmatrix}[Y,X]\\[Z,X]\end{pmatrix}$.

Déduire de la question précédente que :

$$V(X/Z) - V[X/(Y,Z)] = \left([X,Y] - [X,Z][Z,Z]^{-1}[Z,Y]\right) A \left([Y,X] - [Y,Z][Z,Z]^{-1}[Z,X]\right).$$

III. 4° a - Calculer le produit BC des matrices :

$$B = \begin{pmatrix} Id & -[X,Z][Z,Z]^{-1} \\ 0 & Id \end{pmatrix} \text{ et } C = [(X,Z),(X,Z)].$$

où Id désignent des matrices identités et 0 une matrice nulle, de tailles convenables.

b - En déduire que : $\det V(X/Z) = \dfrac{\det[(X,Z),(X,Z)]}{\det[Z,Z]}$.

## IV

Dans toute cette partie F, G, H désignent trois sous-espaces non réduits à l'élément nul et tels que : dim(F+G+H) = dim F + dim G + dim H; X,Y,Z sont des bases respectives de ces sous-espaces.

IV. 1° On considère la quantité : $\mathrm{Log}\left(\dfrac{\det[X,X]\ \det[Y,Y]}{\det[(X,Y),(X,Y)]}\right)$.

a - Vérifier que cette quantité est indépendante des bases X,Y choisies dans F et G. Elle peut donc être notée C(F,G).

b - Montrer que cette quantité est toujours positive et qu'elle ne s'annule que si les sous-espaces F et G sont orthogonaux.

c - Expliciter C[F,G], lorsque les deux sous-espaces F et G sont de dimension 1. Vérifier que C[F,G] s'exprime alors facilement en fonction du cosinus de l'angle entre les vecteurs $x_1$ et $y_1$.

d - Expliciter C[F,G] lorsque F est de dimension 1 et G de dimension 2. Proposer une interprétation en terme "d'angle" généralisant celle vue en c.

IV. 2° Montrer que F et G sont orthogonaux conditionnellement à H si et seulement si : $V(X/Z) = V[X/(Y,Z)]$.

IV. 3° On introduit la quantité : $\mathrm{Log}\dfrac{\det V(X/Z)}{\det V(X/(Y,Z))}$.

a - Vérifier qu'elle est indépendante des bases X, Y, Z choisies dans les sous-espaces F, G, H. Elle peut donc être notée D(F,G/H).

b - Montrer qu'elle est toujours positive et qu'elle ne s'annule que si F est orthogonal à G conditionnellement à H.

c - Etablir que :

$$D[F,G/H] = D[G,F/H] = \mathrm{Log}\left(\frac{\det V(X/Z)\ \det V(Y/Z)}{\det V((X,Y)/Z)}\right).$$

d - On considère des sous-espaces F, G, H de dimensions repectives 2, 2, 1 et tels que $H \subset F \cap G$. Expliciter la quantité D[F,G/H] et en déduire une interprétation de celle-ci en terme d'angle.

e - Répondre à la même question lorsque les sous-espaces ont toujours pour dimensions respectives 2, 2, 1, mais ne satisfont plus nécessairement la condition $H \subset F \cap G$.

IV. 4° A-t-on l'égalité : $D[F,G/H] = C\left(P_H^{\perp} F,\ P_H^{\perp} G\right)$ ?

Tournez la page S.V.P.

Dans cette partie $F_1$, $F_2$, $G_1$, $G_2$ désignent des sous-espaces non réduits à l'élément nul et tels que :

$$\dim(F_1 + F_2 + G_1 + G_2) = \dim F_1 + \dim F_2 + \dim G_1 + \dim G_2 .$$

V. 1° Montrer l'égalité :

$$C(F_1+F_2, G_1+G_2) = C(F_1, G_1) + D(F_2, G_2/F_1+G_1) + D(F_2, G_1/F_1) + D(F_1, G_2/G_1)$$

V. 2° Interpréter l'égalité précédente et en déduire notamment une condition nécessaire et suffisante pour que $F_1+F_2$ et $G_1+G_2$ soient orthogonaux, condition faisant intervenir des orthogonalités conditionnelles.

V. 3° Etablir l'égalité :

$$D(F_2, G_1+G_2/F_1) = D(F_2, G_1/F_1) + D(F_2, G_2/F_1+G_1).$$

En déduire une procédure récursive pour étudier l'orthogonalité conditionnelle.

• •

*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail